Parte II

MATEMÁTICAS FINANCIERAS



amv

Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia

Introducción

Las Matemáticas financieras son un área del conocimiento que aprovecha herramientas cuantitativas para el análisis del Valor del dinero en el tiempo y para el estudio de las equivalencias económicas.

En esta guía, expertos de la academia y de la industria financiera, pertenecientes al Programa de Autores de AMV, desarrollan las temáticas propuestas con un enfoque practico y didáctico, considerando las necesidades actuales de los profesionales en la materia y los estándares de conocimiento vigentes, y atendiendo las directrices del Comité Académico de AMV.

La guía inicia con la presentación de los conceptos para estudiar el Valor del dinero en el tiempo, y para analizar viabilidad en Alternativas de inversión. Mediante ejemplos relacionados con situaciones de la realidad, el lector encontrará los criterios para aplicar los conceptos descritos en diversas situaciones.

La guía continua con una descripción de los Indicadores económicos fundamentales requeridos para estructurar operaciones financieras y para analizar problemas financieros en el mercado colombiano. Tras presentar ejemplos prácticos, que evidencian la utilidad y uso de los Indicadores presentados, la guía concluye con la descripción de las herramientas cuantitativas necesarias para el análisis de series de flujos de efectivo uniformes y Anualidades.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

1. Conceptos de valor del dinero en el tiempo



Objetivos de aprendizaje

- Entender los componentes de la tasa de interés.
- Entender la relación entre la tasa de interés y el costo del dinero.
- Entender los conceptos y la aplicación de las tasas vencidas y anticipadas.
- Diferenciar entre tasas simples y compuestas, y entre tasas nominales y efectivas.
- Aplicar el concepto de equivalencia en la conversión de las tasas de interés.

1.1. Interés y tasa de interés

El economista Irving Fisher formalizó el concepto de tasa de interés en 1930. Desde entonces, el concepto ha evolucionado para incluir los diferentes componentes que afectan las tasas de interés comerciales.

DeFusco, McLeavey, Pinto & Runkle recogen las tres definiciones de tasa de interés del Chartered Financial Analysts Institute (CFA, 2018):

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

23 Como tasa de retorno de una inversión, es decir la rentabilidad porcentual que recibe un inversionista por invertir su dinero.

3 Como tasa de descuento o tasa de interés porcentual, que se utiliza para saber el valor presente de una inversión.

Es el caso del Certificado de depósito a término (CDT), instrumento de ahorro muy utilizado en el sistema financiero colombiano. Con plazos entre un (1) mes y 720 días, se invierten los recursos por un periodo de tiempo determinado sin poder disponer de ellos hasta su vencimiento.

Por ejemplo, si hace seis (6) meses se invirtieron a un año COP$ 100 millones en un CDT pero se requiere el dinero hoy, seis (6) meses antes de la maduración del título, el banco aplica una tasa de descuento para determinar el monto a entregar por el CDT.

3 Como costo de oportunidad que es la tasa de interés que deja de percibirse cuando se elige entre inversiones diferentes.

Por ejemplo, si se tiene un CDT de COP$ 100.000.000 y se liquida para comprar acciones, el costo de oportunidad es el interés que dejó de percibirse por liquidar el CDT.

Entonces, los tres términos, tasa descuento, tasa de retorno y costo de oportunidad quieren decir lo mismo: una tasa de interés porcentual.

Las tasas de interés comerciales como la tasa de depósitos a término fijo (DTF), se rigen en gran medida por la oferta y la demanda de dinero. Cuando las personas solicitan más préstamos de lo que el banco capta en cuentas de ahorros, la tasa sube. Si por el contrario, las personas no quieren endeudarse más y los bancos comienzan a captar más de lo que prestan, la tasa de interés tiende a bajar.

La siguiente fórmula representa los componentes de la tasa de interés, con base en CFA (2018):

$$i_c = (1+i_r)x(1+i_f)x(1+i_p)x(1+i_l)x(1+i_v)-1$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

donde:

i_r: interés real o tasa de interés libre de riesgo sin inflación. En teoría debe ser igual en todas partes del mundo.
i_f: tasa de interés de la inflación, es decir, la pérdida del poder adquisitivo del dinero durante el periodo de inversión.
i_p: riesgo de crédito o tasa de interés que compensa la probabilidad de no pago de la inversión por la entidad.
i_l: riesgo de liquidez o precio medido en tasa de interés a la facilidad con la que puede venderse la inversión a un tercero.
i_v: tasa de interés de los términos de vencimiento o tasa de interés que mide el costo del tiempo para recibir el dinero invertido más los rendimientos esperados. A menor tiempo, menor tasa de interés por vencimiento.

Ejemplo 1

Va a abrirse un CDT de COP$ 100.000.000 a un (1) año en un banco AAA (la calificación más alta posible y que supone un riesgo mínimo) que no tiene riesgo de crédito.

Datos:

i_r: 0,5% anual o efectivo anual (E.A.)
i_f: 3,5% anual o efectivo anual (E.A.)
i_l: 0% anual o efectivo anual (E.A.)
i_v: 1% anual o efectivo anual (E.A.)¿Cuál es la tasa de interés comercial?

$$i_c = 0{,}0506_c = (1+0{,}005_r)x(1+0{,}035_f)x(1+0{,}0_p)x(1+0{,}0_l)x(1+0{,}01_v)-1$$

Respuesta: la tasa de interés comercial del CDT es 5,06% anual o efectivo anual E.A.

Ejemplo 2

Para la Corporación financiera La Torre S.A.S. que no es vigilada por la Superfinanciera, la tasa de interés por la probabilidad de no pago (riesgo de crédito) es del 10% y la tasa de interés por riesgo de liquidez es el 5%.

¿De cuánto sería la tasa de interés comercial de la Corporación financiera La Torre S.A.S. si todos los otros supuestos del Banco AAA se mantienen?

$$i_c = (1+0{,}005_r)x(1+0{,}035_f)x(1+0{,}1_p)x(1+0{,}05_l)x(1+0{,}01_v)-1$$

Respuesta: la tasa de interés comercial es 21,34% anual o efectivo anual E.A.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

1.2. Tasas de interés simple y compuesta

Los diagramas de flujo de caja permiten visualizar cómo funciona una inversión.

La inversión del ejemplo anterior puede graficarse (COP$ 100.000.000 al 5,06% anual):

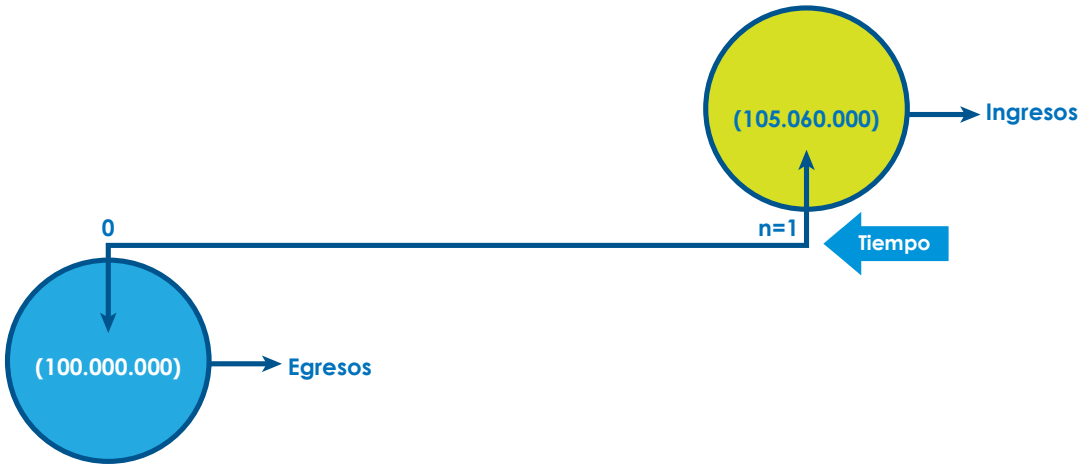
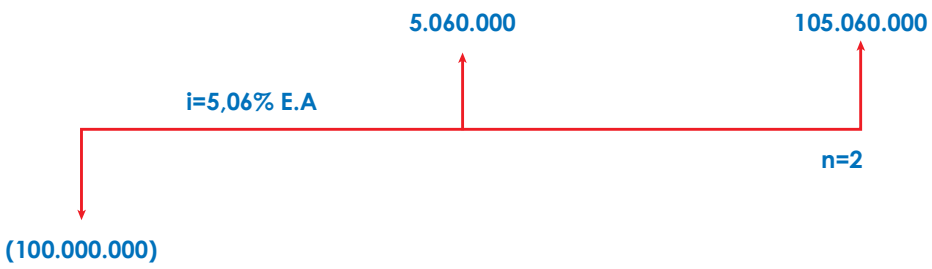


Figura 1. Explicación del diagrama de flujo de caja
Adaptado de Sarmiento, Cayón y Rivera (2007)

La flecha hacia abajo representa la inversión, que es el momento cuando se consignan los COP$ 100.000.000 en el banco y se abre el CDT. Como se invierte a un año (n=1) a una tasa del 5,06% E.A., al final del año se tiene un ingreso (la flecha hacia arriba) que incluye el capital invertido (COP$ 100.000.000) y el rendimiento de la inversión (COP$ 100.000.000 X 0,0506) = COP$ 5.060.000, es decir, un ingreso total de COP$ 105.060.000 (el momento 0 de una inversión es el momento en que se hace la inversión).

Si se tienen dos opciones de inversión, la primera paga intereses anualmente y mantiene invertido el capital durante dos años; la segunda reinvierte los intereses que se reciben durante dos años y mantiene invertido el capital durante dos años:

El diagrama de flujo de caja de la primera opción es:

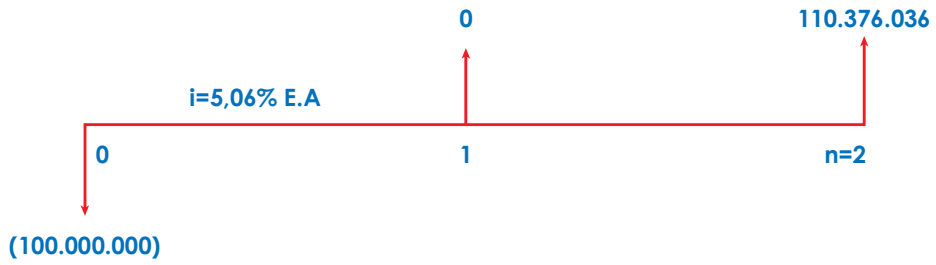


Adaptado de Sarmiento, Cayón, y Rivera (2007)

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Con el interés simple o periódico se pagan intereses sobre el capital invertido. El gráfico representa el momento 0 cuando el inversionista va al banco. Al cumplirse el primer año, retira los intereses del primer año (COP$ 5.060.000) y deja el capital. Al final del segundo año retira el capital invertido más los intereses del segundo año (COP$ 105.060.000). Por consiguiente, en intereses pagados, recibió durante los dos años un total de COP$ 5.060.000 X 2 = COP$ 10.120.000.

El diagrama de flujo de la segunda opción es:



Adaptado de Sarmiento, Cayón, y Rivera (2007)

Es el caso del interés compuesto o efectivo. Se pagan los intereses sobre el capital invertido más los intereses que no se cobraron al banco, esto es, los del primer año. Por consiguiente, la nueva suma de capital invertido para el segundo año aumenta: COP$ 100.000.000 + COP$ 5.060.000 = COP$ 105.060.000. Entonces, en el segundo año se pagn el 5,06% E.A. sobre COP$ 105.060.000. Para el segundo año, el interés pagado es COP$ 105.060.000 X 5,06% = COP$ 5.316.036. Ese monto se suma a COP$ 105.060.000 y da COP$ 110.376.036.

En otras palabras, el interés compuesto o efectivo ocurre cuando se paga interés sobre el capital invertido y los intereses causados pero no pagados al inversionista.

La siguiente fórmula permite calcular la tasa de interés compuesta o efectiva para un número de periodos consecutivos:

$$I_{efectivo} = (1+i_{periódico})^{n} - 1$$

donde:

$i_{periódico}$: periodo de interés simple en el que se pagan los intereses (mensual, trimestral, semestral y anual)
n: número de periodos a reinvertir

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

En el caso anterior, si la tasa de interés es 5,06% E.A. y se reinvierte por 2 años:

$i_{periódico}$=5,06
n=2

se tiene:

$$(1+0,0506)^2-1 = 0,10376036$$
$$o$$
$$10,376036\% \text{ efectivo o compuesto a dos años.}$$

Se multiplica por los COP$ 100.000.000 invertidos y se obtiene el interés pagado al final de los dos años: COP$ 10.376.036.

Ejemplo 3

Se hace una inversión que paga el 2,5% cada 180 días o semestre vencido S.V.

¿Cuál es la tasa de interés compuesta o efectiva si se reinvirtiera el dinero durante cuatro (4) semestres?

$$(1+0,025)^4-1 = 0,1038$$
$$o$$
$$10,38\%$$

Respuesta: la tasa de interés compuesta o efectiva es 10,38%

1.3. Tasas de interés equivalentes

1.3.1. Tasa de interés vencida

Todos los intereses se pagan de manera vencida, es decir, al final del periodo. En todos los casos hay que invertir primero y después se reciben los rendimientos de la inversión.

En Colombia, la nomenclatura de mes vencido M.V. se utiliza de manera común para la comercialización de préstamos bancarios. Si un banco ofrece tarjetas de crédito al 2,14% M.V. o préstamos para adquisición de vehículos al 1,4% M.V. quiere decir, que sobre el monto que se utilice o pida prestado, va a pagar esta tasa de

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

interés por mes, al final del mes. Esta nomenclatura es común para otros periodos como trimestre vencido T.V. o semestre vencido S.V.

1.3.2. Tasa de interés anticipada

Como todos los intereses siempre se pagan de manera vencida, la tasa anticipada solo es una manera comercial de expresar la tasa vencida para que el cliente entienda de una manera más sencilla la operación comercial que efectúa. Es un tipo de tasa común que utilizan algunos establecimientos financieros para operaciones de redescuento y en las operaciones de *factoring*, operación bancaria en la que el cliente endosa una factura o cartera comercial de un tercero al banco, este descuenta el interés anticipado, gira el monto y una vez el tercero paga, el banco recibe el monto completo.

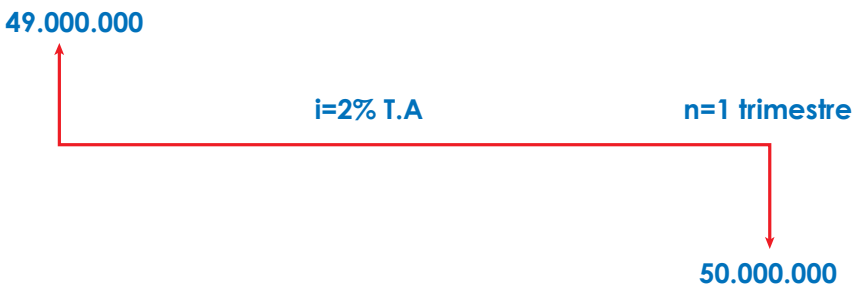
Es importante evitar la confusión al utilizar la expresión *trimestre anticipado* cuando se refiere a una tasa nominal anual trimestre anticipada y no para referirse a los 90 días exactos, tema que se analiza en la sección sobre tasas nominales y efectivas.

Ejemplo 4

Una compañía que vende su producto a una gran cadena de almacenes que paga a 90 días (un trimestre) necesita con urgencia el dinero para pagar la nómina del mes. La compañía de *factoring* le ofrece descontar la factura de COP$ 50.000.000 al 2% T.A.

Se parte de una tasa trimestral anticipada que se refiere exactamente a un trimestre o 90 días calendario.

El diagrama de flujo de caja es:



Adaptado de Sarmiento, Cayón, y Rivera (2007)

Desde la perspectiva de la compañía, el negocio fue recibir COP$ 49.000.000 y pagar los COP$ 50.000.000 al final del trimestre. Pagó de manera anticipada los intereses de COP$ 1.000.000, resultado de multiplicar la factura por la tasa de des-

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

cuento (COP$ 50.000.000 X 2%) y restarlo al monto original (COP$ 50.000.000 - COP$ 1.000.000 = COP$ 49.000.000).

Desde la perspectiva de la compañía de factoring, recibe COP$ 1.000.000 cuando le paguen los COP$ 50.000.000 en 90 días o al final del trimestre. Su negocio fue prestar COP$ 49.000.000 y recibir COP$ 1.000.000 de ganancia de manera vencida.

La tasa de interés real de la operación es:

$$1.000.000 / 49.000.000 = 0,0204$$

o

$$2,04\% \text{ trimestre vencido T.V.}$$

pues la compañía de *factoring* recibe COP$ 1.000.000 al final del trimestre.

A esto se le conoce como el concepto de equivalencia: una tasa del 2% T.A. es equivalente a una tasa del 2,04% T.V.

Las siguientes fórmulas se usan para convertir tasas vencidas a anticipadas por periodos específicos de tiempo:

$$i_v = \frac{i_a}{1 - i_a}$$

$$i_a = \frac{i_v}{1 + i_v}$$

donde:

i_v: interés vencido
i_a: interés anticipado

Entonces:

$$\frac{0,02}{(1-0,02)} = 0,0204$$

o

$$2,04\% \text{ T.V.}$$

Ejemplo 5

Se parte de una tasa trimestral anticipada que se refiere exactamente a un trimestre o 90 días calendario.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Una compañía de factoring descuenta facturas a 180 días y quiere ganar el 25% semestre vencido (S.V.).

¿Cuál es la tasa anticipada que debe cotizar al cliente para realizar la operación?

$$\frac{0{,}25}{(1+0{,}25)} = 20\%$$

Respuesta: la tasa anticipada que debe cotizar es 20% S.A.

1.4. Tasas de interés nominal y efectiva

La tasa de interés nominal es la que se pacta durante un periodo de tiempo determinado por ejemplo años pero su periodo de liquidación se hace en meses. Las fracciones de los periodos para la cual se ha pactado la tasa son intereses simples o periódicos.

Una tasa *efectiva* es el resultado de capitalizar o aplicar la fórmula de intereses compuestos a una tasa periódica. Una tasa *efectiva* también puede ser periódica para el tiempo especificado. Por ejemplo una tasa efectiva anual E.A. puede ser una tasa periódica anual. Y una tasa periódica mes vencido M.V. es también una tasa efectiva mensual.

Las tasas nominales son una nomenclatura por la cual se establece una especie de contrato sobre la manera que se van a pagar los intereses. Por ejemplo, si se paga el 12% nominal anual trimestre vencido N.A.T.V., el compromiso de pagar un total de 12% durante un año en cuotas trimestrales vencidas del 3% (3% X 4 = 12%). Así, 3% es un interés periódico trimestral vencido T.V. o efectivo trimestral.



Figura 2. Cómo leer la nomenclatura de las tasas nominales
Tomado de Sarmiento, Cayón, y Rivera (2007)

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Ejemplo 6

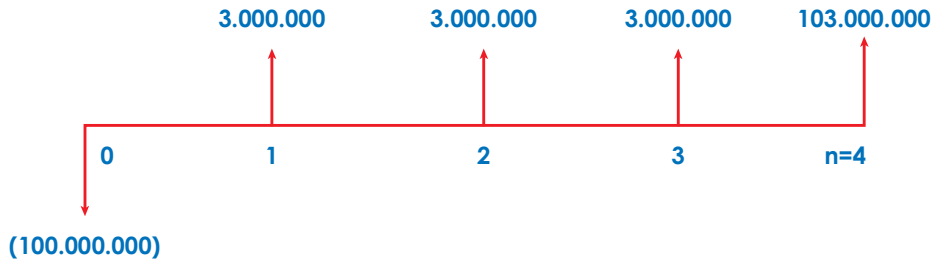
Quiere invertirse COP$ 100.000.000 al 12% N.A.T.V.

El diagrama de flujo es:

12% N.A.T.V

$i = (12\%/4) = 3\%$ T.V.

$3\%x100.000.000 = 3.000.000$



Adaptado de Sarmiento, Cayón, y Rivera (2007)

Así, se pagan COP$ 12.000.000 al año (nominal anual o N.A.) en cuatro (4) cuotas trimestrales vencidas T.V. de COP$ 3.000.000, es decir COP$ 3.000.000 X 4 = COP$ 12.000.000.

Con las fórmulas siguientes se convierten los intereses periódicos a efectivos y viceversa:

$$i_{Efectivo} = (1+i_{periódico})^{n}-1$$

$$i_{Periódico} = (1+i_{efectivo})^{(1/n)}-1$$

donde:

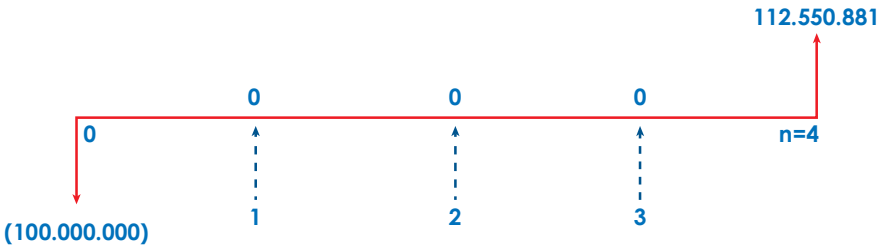
n: periodos que una tasa periódica cabe en un año

Si en el ejemplo anterior se capitalizan los intereses y se recibe un pago efectivo anual E.A., mediante la anterior fórmula para calcular el interes efectivo, con la tasa periódica del 3% trimestre vencido T.V.:

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Se tiene que la tasa efectiva anual es:

$$12{,}55\%\ E.A.$$
$$o$$
$$0{,}1255 = (1+0{,}03)^4-1$$
$$I = 12{,}55\%\ E.A$$



Es posible identificar el uso de la tasa efectiva anual E.A. y de las tasas periódicas en la colocación de créditos. En estas operaciones, los usuarios pagan intereses periódicos que pueden ser mensuales vencidos M.V., aun cuando el banco también les informa la tasa efectiva anual equivalente E.A. Se recomienda revisar la información en los decretos correspondientes (Superfinanciera, s.f.a).

En resumen se tienen tres tipos de tasas:



Nominal: tasa pactada para un periodo de tiempo donde los intereses se pagan para periodos menores al pactado en la tasa.

Periódica o simple: tasa pactada para un periodo determinado.

Efectiva o compuesta: tasa a la cual se llega reinvirtiendo los intereses periódicos o simples pagados, de la tasa nominal.

» En la calculadora financiera:

FIN (menú financiero) → CONVI (conversión de tasas de interés) → PER (para convertir tasa periódicas a efectivas) →

Al final aparece un cuadro que dice

%NOM	%EFE	P

y se obtiene el resultado.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Ejemplo 7

Un banco otorga un préstamo para compra de vehículo al 0,99% M.V.

¿Cuáles son la tasa nominal anual mes vencida N.A.M.V. y la tasa efectiva anual E.A.?

1. Ya se tiene una tasa periódica M.V. Se convierte a tasa nominal anual multiplicándola por 12 (12 meses por año):

$$(12x0{,}99\%) = 11{,}88\%\ N.A.M.V.$$

2. Se pasa a determinar a cuánto equivale un 0,99% MV en efectivo anual:

$$12{,}55\%\ E.A. = 0{,}1254 = (1+0{,}0099)^{12}-1$$

Respuesta: como aplica el concepto de equivalencia: una tasa periódica del 0,99% M.V. equivale al 11,88% N.A.M.V. que equivale al 12,54% E.A.

En la calculadora financiera:

Recuerde que en la calculadora las tasas nominales siempre se deben ingresar como nominal anual:

0,99X12 **ENTER** → **%NOM**

12 → **P**

Luego:

%EFE

y se obtiene el resultado.

Ejemplo 8

Un fondo de inversión ofrece una rentabilidad del 7,08% E.A. en los últimos 180 días.

¿De cuánto fue la rentabilidad real del fondo en los últimos 180 días?

1. Se convierte la tasa efectiva anual del 7,08% E.A. a 180 días o semestre vencido:

Con la fórmula para calcular el interés vencido de la página 16 se obtiene la rentabilidad real del fondo en los últimos 180 días:

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

$$(1+0{,}0708)^{(1/2)}-1 = 0{,}0348 \text{ periódica semestral o } 3{,}48\% \text{ S.V.}$$

2. Si quiere convertirse la tasa periódica semestre vencido S.V. a nominal anual N.A., se multiplica por 2 (dos semestres en un año):

$$(3{,}48\%x2) = 6{,}96\% \text{ N.A.S.V.}$$

Respuesta: si se aplica el concepto de equivalencia, 7,08% E.A. equivale a 3,48% S.V., que equivale a 6,96% N.A.S.V.

» En la calculadora financiera:

Recuerde que en la calculadora las tasas efectivas se convierten a nominal anual:

7,08% → EFE

2 → P

Luego:

%NOM

se obtiene el resultado:

Se divide entre 2 y da la respuesta:

6,96% N.A.S.V.

3,48% S.V.

En Colombia no es común escribir el nominal anual antes de la tasa. Los bancos normalmente cotizan las tasas DTF nominal anual trimestre anticipado como DTF T.A. que realmente quiere decir DTF N.A.T.A.

Ejemplo 9

Quiere abrirse una CDT a un (1) año y la tasa que ofrecen es DTF T.A. que está al 4,33% más un spread de 0,10% T.A. Es decir, el banco está cotizando al 4,33% + 0,1% o 4,43% N.A.T.A.

¿Cuánto va a ser la rentabilidad real en E.A.?

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

1. Se saca la tasa periódica trimestre anticipado:

$$1{,}10\% = (4{,}43\%/4)$$

2. Como es una tasa anticipada, se convierte a trimestral vencida utilizando la fórmula para calcular el interes vencido de la página 16:

$$\frac{0{,}0110}{(1-0{,}0110)} = 0{,}0112$$

$$o$$

$$1{,}12\%$$

3. El último paso es aplicar la fórmula para encontrar la efectiva anual:

$$4{,}56\%\ E.A.$$

$$o$$

$$0{,}0456 = (1+0{,}0112)^4 - 1$$

Respuesta: una tasa del 4,44% N.A.T.A equivale a un 1,11 T.A., que equivale a 1,12% T.V., que al final equivale a un 4,56% E.A.

» En la calculadora financiera:

Recuerde que en la calculadora las tasas nominales siempre se ingresan como nominal anual. Para que la calculadora entienda que se trata de una tasa anticipada, P debe ser negativo:

$4{,}43 \rightarrow$ **%NOM**

$-4 \rightarrow$ **P**

Luego:

%EFE

y se obtiene el resultado:

$$4{,}56\%\ E.A.$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

2. Valor presente neto (VPN) y Tasa interna de retorno (TIR)



Objetivos de aprendizaje

- Comprender e interpretar el Valor presente neto (VPN).
- Comprender e interpretar la Tasa interna de retorno (TIR).

2.1. Valor presente neto (VPN)

2.1.1. Definición

En un proyecto pueden presentarse múltiples ingresos y egresos en diferentes momentos del horizonte de tiempo considerado. Para estimar un ingreso o egreso neto se calcula el valor presente de los diferentes flujos dada una tasa de interés o costo de oportunidad del inversionista. El VPN es, entonces, el valor presente en el momento cero, de todos los flujos de caja, incluido el inicial, descontados a la tasa mínima requerida de retorno.

Valor presente neto (VPN)

Consiste en tomar todos los valores de cada alternativa en el punto cero; es decir, se calculan los valores presentes de los ingresos netos con base en la

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

tasa mínima de rendimiento o tasa de interés de oportunidad, que no es más que la tasa atractiva para el inversionista (Álvarez, 2001: 242).

El VPN representa el valor del proyecto, en términos de efectivo, el día de hoy. Por lo tanto, se considera que los proyectos buenos son aquéllos que tienen un VPN positivo y hacen más rico al inversionista. Los proyectos con VPN negativo tienen costos que exceden sus beneficios y, aceptarlos, resulta equivalente a perder dinero hoy (Berk & Demarzo, 2008: 55).

Es el resultado de descontar (traer a valor presente) los flujos de caja proyectados de una inversión a la tasa de interés de oportunidad o costo de capital y sustraerle el valor de la inversión. Si el resultado obtenido genera un remanente positivo, el proyecto es viable; si por el contrario el resultado es negativo, el proyecto no debe llevarse a cabo (Rosillo, 2009: 217).

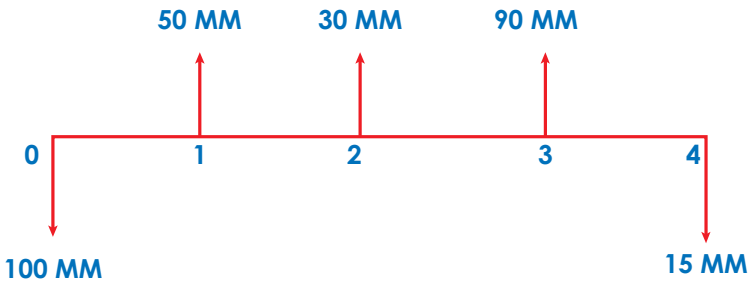
2.1.1. Aplicaciones

Ejemplo 1

Un inversionista requiere una tasa de 16% E.A.

¿Cuál es el VPN del proyecto representado por los siguientes flujos de caja netos anuales?

El flujo de caja del proyecto es el siguiente:



Posteriormente, se llevan al presente todos los flujos de caja:

$$VPN\,(i\%) = \frac{F_0}{(1+i)^0} + \frac{F_1}{(1+i)^1} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} + \frac{F_4}{(1+i)^4}$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

La fórmula anterior puede reducirse a:

$$VPN\,(i) = \sum_{k=0}^{K} \frac{Fk}{(1+i)^k}$$

En el cálculo, registran los ingresos con signo positivo y los egresos con signo negativo.

$$VPN\,(16\%) = -100.000.000 + \frac{50.000.000}{(1{,}16)} + \frac{30.000.000}{(1{,}16)^2} + \frac{90.000.000}{(1{,}16)^3} - \frac{15.000.000}{(1{,}16)^4}$$

Es común comenzar con el valor presente de los flujos de caja proyectados y restar al final el flujo de caja inicial:

$$VPN\,(16\%) = \frac{50.000.000}{(1{,}16)} + \frac{30.000.000}{(1{,}16)^2} + \frac{90.000.000}{(1{,}16)^3} - \frac{15.000.000}{(1{,}16)^4} - 100.000.000$$

$$VPN\,(16\%) = 14.773.159$$

Respuesta: el VPN del proyecto con una tasa del 16% es COP$ 14.773.159

» En la calculadora financiera (tomando como referencia la HP 17bII+):

1. Iniciar con Menú *FIN* luego *F.CAJ*.

Se recomienda borrar las memorias del flujo de caja con *SHIFT* (azul) y luego *INPUT (CLR DATA)*.

2. Insertar el flujo de caja:

FIN	COM	SUMA	CALE	RESOL	CMBM
VDT	CNVI	F.CAJ	BONO	DEPRC	

F.CAJ(0)	- 100.000.000	INPUT

CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS

F.CAJ(1)	50.000.000	INPUT
No. VECES (1)	1	INPUT
F.CAJ(2)	30.000.000	INPUT
No. VECES (2)	1	INPUT
F.CAJ(3)	90.000.000	INPUT
No. VECES (3)	1	INPUT
F.CAJ(4)	-15.000.000	INPUT
No. VECES (4)	1	INPUT

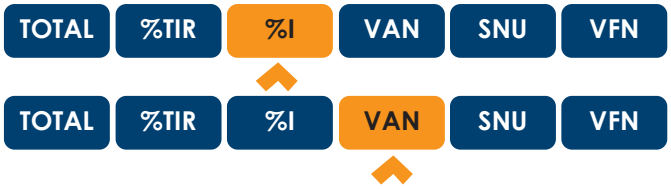
Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

3. Salir con **EXIT** y seleccionar **CALC** :



4. Para calcular el VPN o Valor actual neto (VAN): ingresar la tasa de descuento de los flujos de caja:

Ingresar 16, luego **I%** y luego **VAN** para el cálculo deseado:



El resultado obtenido es el mismo al que se llegó despejando la ecuación planteada.

>=0

<0

Si el VPN es igual a cero o es positivo, el proyecto se acepta pues renta exactamente la tasa exigida (para el caso de cero) o más de lo exigido (cuando es positivo). Si el VPN es negativo, el proyecto renta por debajo de la tasa mínima exigida, por lo que el proyecto se rechaza.



Como variante del VPN, se puede calcular el VP que no resta el flujo de caja inicial, pero permite una interpretación adicional:

$$VPN\,(16\%) = \frac{50.000.000}{(1{,}16)} + \frac{30.000.000}{(1{,}16)^2} + \frac{90.000.000}{(1{,}16)^3} + \frac{15.000.000}{(1{,}16)^4}$$

$$VPN\,(16\%) = 114.773.159$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Así, un VPN de COP$ 14.773.159 implica que el proyecto genera valor por encima de la tasa requerida. Esto es, el proyecto renta el 16% exigido y más, y por tanto se acepta al tener un VPN positivo. Adicionalmente, el VP de COP$ 114.773.159 significa que en el proyecto podría invertirse hasta dicha cantidad y aun así obtener el 16% requerido.

2.2. Tasa interna de retorno (TIR)

2.2.1. Definición

Cuando en un proyecto de inversión o de financiación se tienen múltiples flujos de caja, la rentabilidad esperada de una inversión o el costo de un préstamo, se calcula con la Tasa interna de retorno (TIR).

La TIR iguala los ingresos y los egresos de un proyecto en un mismo punto en el tiempo. Así mismo, hace igual a cero el Valor Presente Neto de un proyecto.

Tasa interna de retorno (TIR)

La Tasa Interna de Rendimiento (TIR) de una oportunidad de inversión es la tasa de interés que hace que su VPN sea igual a cero (Berk & Demarzo, 2008: 118).

Es la tasa de interés a la cual los flujos de caja descontados y sustraída la inversión, genera un valor presente neto igual a CERO; si esta TIR es mayor que la tasa de oportunidad del inversionista o alternativamente mayor que el costo de capital, el proyecto es viable (Rosillo, 2009: 219).

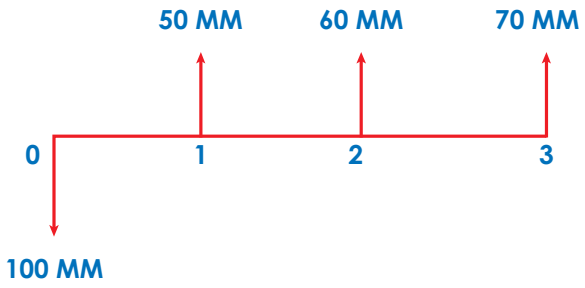
A la tasa de interés que hace equivalente una serie de ingresos con unos egresos en el tiempo, se conoce con el nombre de Tasa Interna de Retorno (TIR) (Agudelo & Fernández, 2019: 353).

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

2.2.1. Aplicaciones

Ejemplo 2

Calcule e interprete la TIR de un proyecto de inversión que presenta el siguiente flujo de caja neto anual:



$$Egresos\,(en\ el\ presente) = Ingresos\,(en\ el\ presente)$$

$$100.000.000 = \frac{50.000.000}{(1+i)} + \frac{60.000.000}{(1+i)^2} + \frac{70.000.000}{(1+i)^3}$$

Como la TIR hace igual a cero el VPN, se pasan los egresos a restar al lado derecho de la ecuación:

$$VPN\,(i) = VPN\,(TIR) = 0$$

$$0 = -100.000.000 + \frac{50.000.000}{(1+i)} + \frac{60.000.000}{(1+i)^2} + \frac{70.000.000}{(1+i)^3}$$

Por método de tanteo, se despeja la variable (i) ensayando varios valores de i. Luego se interpola para obtener una TIR aproximada.

Se va cerrando el rango de tasas mediante iteración hasta obtener dos tasas de interés entre las que se encontraba la TIR; con una de ellas el VPN da negativo y con la otra positivo, por lo que con una tasa en ese rango generaría el VPN de cero:

$$Para\ i = 33\%,\ VPN = 1.267.216$$
$$Para\ i = 34\%,\ VPN = (-178.878)$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Luego se interpolan los datos:

$$VPN\ de\ 1.267.216 \rightarrow 33\%$$

$$VPN\ de\ 0 \rightarrow TIR(X)$$

$$VPN\ de\ -178.878 \rightarrow 34\%$$

Las hojas de cálculo y las calculadoras financieras permiten resolver la ecuación de manera más rápida.

» En la calculadora financiera: FCAJA

1. Iniciar con el menú *FIN*, luego .

Recuerde borrar las memorias del flujo de caja.

2. Insertar el flujo de caja:

FIN	COM	SUMA	CALE	RESOL	CMBM
VDT	CNVI	F.CAJ	BONO	DEPRC	

F.CAJ(0)	- 100.000.000 INPUT

CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS

F.CAJ(1)	50.000.000 INPUT
No. VECES (1)	1 INPUT
F.CAJ(2)	60.000.000 INPUT
No. VECES (2)	1 INPUT
F.CAJ(3)	70.000.000 INPUT
No. VECES (3)	1 INPUT

3. Salir con EXIT, seleccionar *CALC* y luego *%TIR*:

CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS
TOTAL	%TIR	I%	VAN	SNU	VFN

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

El resultado obtenido es TIR = 33,875% E.A, el mismo encontrado despejando la ecuación planteada al inicio.

La TIR se entiende como la tasa de rentabilidad efectiva anual estimada para el proyecto. La TIR resulta efectiva según la periodicidad del flujo de caja. Como el flujo de caja es anual, el resultado de la TIR es una tasa efectiva anual (E.A.).

Recuerde:

- La TIR supone la reinversión de los flujos de caja a la misma tasa TIR durante toda la vida del proyecto aunque esto es improbable.



- La TIR arroja una rentabilidad estimada o esperada a la luz de los flujos de caja proyectados.

La TIR calculada cuando se conoce la tasa de reinversión de los flujos de caja positivos se conoce como TIR modificada o Rendimiento compuesto al vencimiento (RCV).

Al evaluar un proyecto, si la TIR es igual o mayor a la tasa mínima requerida de retorno, el proyecto se acepta y si es menor, se rechaza.

Una TIR alta no necesariamente implica un buen proyecto de inversión, pues hay que incorporar la rentabilidad esperada y otros intereses del inversionista como el riesgo y la liquidez.

En el ejemplo 2, se obtuvo una TIR de casi 34% E.A, que es una rentabilidad aparentemente alta. Sin embargo, para la decisión final se requiere la tasa esperada o exigida por el inversionista. Además, dicha rentabilidad esperada seguramente convive con niveles de riesgo altos.

Recomendaciones adicionales al momento de calcular la TIR y el VPN con la calculadora financiera

- **Cuando en alguno de los periodos no haya flujo de caja, en la calculadora se ingresa cero (0). De lo contrario, la herramienta no tendrá en cuenta dicho periodo.**
- **Debe trabajarse con la menor periodicidad del flujo de caja. Si hay flujos de caja mensuales y trimestrales, debe trabajarse con el flujo de caja neto mensual.**

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

- **Cuando en un mismo periodo se presenten varios flujos de caja, debe calcularse el flujo de caja neto pues la herramienta solo recibe un flujo de caja por periodo.**
- **Los egresos y los ingresos deben registrarse con signos opuestos.**

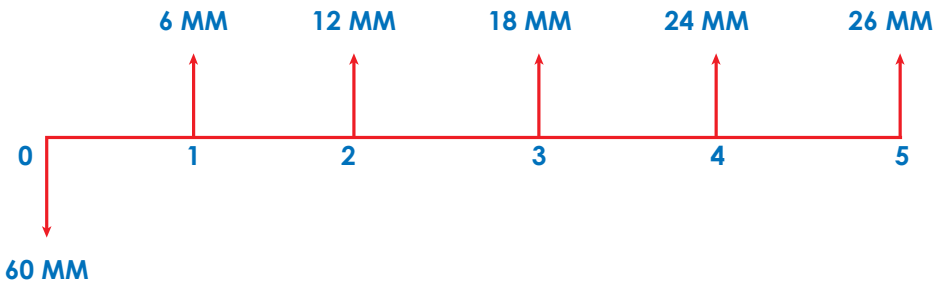
Aplicación de VPN y TIR en un mismo caso

Ejemplo 3

Se dispone de un capital de COP$ 60.000.000 para invertir a un plazo de 5 años. Se presentan dos alternativas:

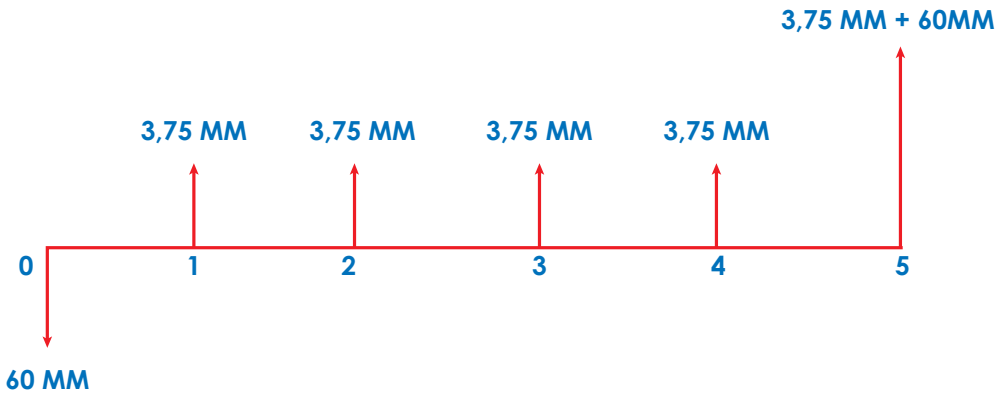
a. Comprar bonos que generan anualmente COP$ 3.750.000 en intereses (cupón) y reembolsan el capital al final del plazo.

b. Invertir en un proyecto a 5 años con el siguiente flujo de caja:



Calcular el VPN a una tasa de descuento (costo de oportunidad del inversionista) del 9% E.A. y la TIR de cada proyecto para determinar el más atractivo, desde el punto de vista de la rentabilidad, suponiendo que el riesgo es comparable y que la liquidez no es relevante.

a.



Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

1. Calcular el VPN con la tasa de descuento del 9% E.A.:

$$VPN\,(9\%) = \frac{3.750.000}{(1{,}09)} + \frac{3.750.000}{(1{,}09)^2} + \frac{3.750.000}{(1{,}09)^3} + \frac{3.750.000}{(1{,}09)^4} + \frac{63.750.000}{(1{,}09)^5} - 60.000.000$$

$$VPN\,(9\%) = -\,6.417.925$$

Respuesta: el VPN es COP$ -6.417.925

» En la calculadora financiera:

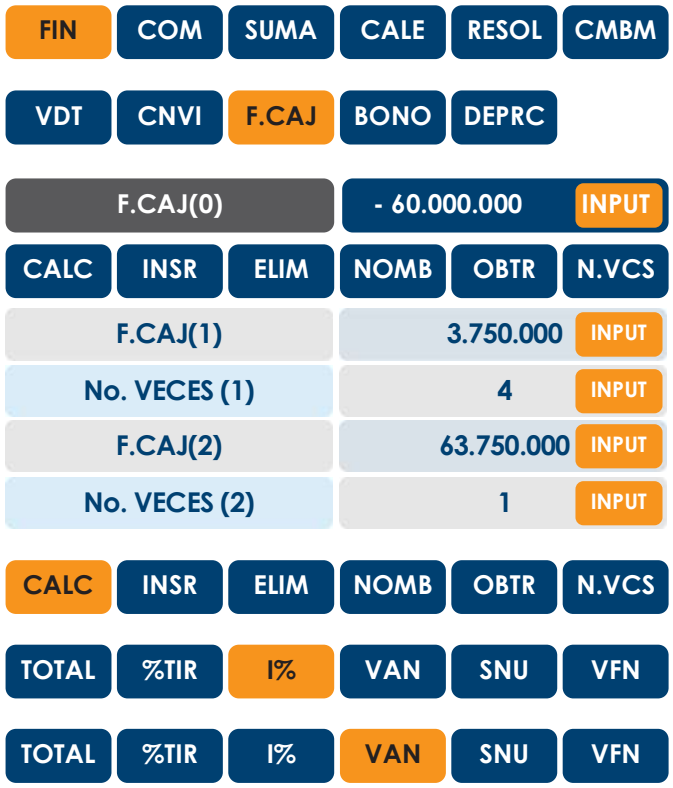
1. *FIN* luego, *F.CAJ*

2. Se ingresa el flujo de caja, luego EXIT, *CALC*, la tasa del 9% en I% y luego VAN:

FIN	COM	SUMA	CALE	RESOL	CMBM
VDT	CNVI	F.CAJ	BONO	DEPRC	
F.CAJ(0)	- 60.000.000	INPUT			
CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS
F.CAJ(1)	3.750.000	INPUT			
No. VECES (1)	1	INPUT			
F.CAJ(2)	3.750.000	INPUT			
No. VECES (2)	1	INPUT			
F.CAJ(3)	3.750.000	INPUT			
No. VECES (3)	1	INPUT			
F.CAJ(4)	3.750.000	INPUT			
No. VECES (4)	1	INPUT			
F.CAJ(5)	3.750.000	INPUT			
No. VECES (5)	1	INPUT			
CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS
TOTAL	%TIR	I%	VAN	SNU	VFN
TOTAL	%TIR	I%	VAN	SNU	VFN

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Hay flujos de caja que se repiten, entonces puede aprovecharse la activación en la calculadora del número de veces que los flujos de caja se repiten de forma consecutiva e ingresar el flujo de caja resumido así:



El resultado es VPN(9%) = -6.417.925

Para la TIR, la ecuación es:

$$0 = -60.000.000 + \frac{3.750.000}{(1+i)} + \frac{3.750.000}{(1+i)^2} + \frac{3.750.000}{(1+i)^3} + \frac{3.750.000}{(1+i)^4} + \frac{63.750.000}{(1+i)^5}$$

» En la calculadora financiera:

1. Se inicia con *FIN*, *F.CAJ*

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

2. Se ingresa el flujo de caja, *EXIT*, *CALC* y luego *TIR*:

FIN	COM	SUMA	CALE	RESOL	CMBM
VDT	CNVI	F.CAJ	BONO	DEPRC	

F.CAJ(0)	- 60.000.000	INPUT

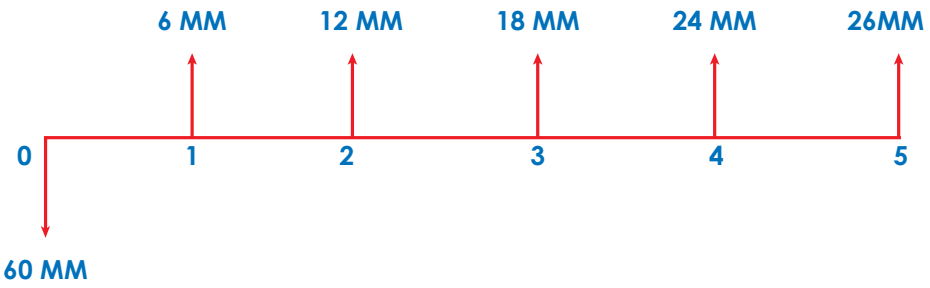
CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS

F.CAJ(1)	3.750.000	INPUT
No. VECES (1)	4	INPUT
F.CAJ(2)	63.750.000	INPUT
No. VECES (2)	1	INPUT

CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS

TOTAL	%TIR	I%	VAN	SNU	VFN

El resultado es TIR= 6,25% E.A.



b.

1. Calcular el VPN con la tasa de descuento del 9% E.A.:

$$VPN(9\%) = \frac{6.000.000}{(1{,}09)} + \frac{12.000.000}{(1{,}09)^2} + \frac{18.000.000}{(1{,}09)^3} + \frac{24.000.000}{(1{,}09)^4} + \frac{26.000.000}{(1{,}09)^5} - 60.000.000$$

$$VPN\,(9\%) = 3.404.471$$

Respuesta: el VPN es COP$ 3.404.471

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

» En la calculadora financiera:

1. Iniciar con *FIN*, *F.CAJ*

2. Ingresar el flujo de caja, luego *EXIT*, *CALC*, ingresar la tasa del 9% en I% y luego VAN :

FIN	COM	SUMA	CALE	RESOL	CMBM
VDT	CNVI	F.CAJ	BONO	DEPRC	

F.CAJ(0)	- 60.000.000 INPUT

CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS

F.CAJ(1)	6.000.000 INPUT
No. VECES (1)	1 INPUT
F.CAJ(2)	12.000.000 INPUT
No. VECES (2)	1 INPUT
F.CAJ(3)	18.000.000 INPUT
No. VECES (3)	1 INPUT
F.CAJ(4)	24.000.000 INPUT
No. VECES (4)	1 INPUT
F.CAJ(5)	26.000.000 INPUT
No. VECES (5)	1 INPUT

CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS

TOTAL	%TIR	I%	VAN	SNU	VFN

TOTAL	%TIR	I%	VAN	SNU	VFN

El resultado es VPN(9%) = 3.404.471

Para la TIR, la ecuación es:

$$0 = -60.000.000 + \frac{6.000.000}{(1+i)} + \frac{12.000.000}{(1+i)^2} + \frac{18.000.000}{(1+i)^3} + \frac{24.000.000}{(1+i)^4} + \frac{26.000.000}{(1+i)^5}$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

» En la calculadora financiera:

1. Poner *FIN*, *F.CAJ*

2. Ingresar el flujo de caja, luego *EXIT*, *CALC* y luego *TIR*:

FIN	COM	SUMA	CALE	RESOL	CMBM
VDT	CNVI	F.CAJ	BONO	DEPRC	

F.CAJ(0)	- 60.000.000	INPUT

CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS

F.CAJ(1)	6.000.000	INPUT
No. VECES (1)	1	INPUT
F.CAJ(2)	12.000.000	INPUT
No. VECES (2)	1	INPUT
F.CAJ(3)	18.000.000	INPUT
No. VECES (3)	1	INPUT
F.CAJ(4)	24.000.000	INPUT
No. VECES (4)	1	INPUT
F.CAJ(5)	26.000.000	INPUT
No. VECES (5)	1	INPUT

CALC	INSR	ELIM	NOMB	OBTR	N.VCS
TOTAL	%TIR	I%	VAN	SNU	VFN

El resultado es TIR = 10,76% E.A.

a.

Años	0	1	2	3	4	5
Pago	$ (60.000.000)	$ 3.750.000	$ 3.750.000	$ 3.750.000	$ 3.750.000	$ 63.750.000
VPN (9%)	$ (6.417.925)					
TIR	6,25%					
VP (9%)	$53.582.075					

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

b.

Años	0	1	2	3	4	5
Pago	$ (60.000.000)	$ 6.000.000	$ 12.000.000	$ 18.000.000	$ 24.000.000	$ 26.000.000
VPN (9%)	$ 3.404.471					
TIR	10.76%					
VP (9%)	$63.404.471					

Resumen:

Respuesta:

Se selecciona la alternativa de inversión b. pues el VPN positivo indica que el proyecto genera valor por encima de la tasa mínima requerida. Es decir, tiene una rentabilidad estimada mayor que la mínima requerida por el inversionista que es del 9% E.A.

Aunque con el VPN no se determina la rentabilidad proyectada de la inversión, al calcularla con la TIR se obtiene 10,76% E.A. Entonces se corrobora que el proyecto renta por encima del 9% exigido por el inversionista.

Con base en la TIR y el VPN el proyecto se acepta. Si se complementa con el VP, se concluye que podría invertirse hasta COP$ 63.404.471 en la alternativa b. y aun así obtener el 9% E.A.

Se rechaza la alternativa a. El VPN negativo indica que el proyecto destruye valor. Es decir, tiene una rentabilidad estimada menor que la mínima requerida por el inversionista del 9% E.A. La TIR del 6,25% E.A. indica que la rentabilidad proyectada está por debajo del 9% E.A. exigido por lo que, con base en la TIR y el VPN, el proyecto se rechaza. Si se complementa con el VP, se concluye que lo máximo que podría pagarse por el bono en el momento cero para asegurar la tasa esperada por el inversionista es COP$ 53.582.075, que sería el precio de dicho título si la tasa de mercado (tasa de descuento) fuera del 9% E.A.

Es importante destacar que la TIR también es usada en el análisis y selección de proyectos. En estos contextos la TIR no es un indicador conveniente para ordenar proyectos mutuamente excluyentes.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

3. Cálculo de Indicadores económicos



Objetivos de aprendizaje

- Definir los principales indicadores económicos, su cálculo y su aplicabilidad en las matemáticas financieras y en el entorno colombiano.
- Conocer en detalle el tratamiento de las tasas indizadas a través del cálculo de tasas combinadas de manera geométrica, mediante ejemplos prácticos.

3.1. El Índice de precios al consumidor (IPC)

3.1.1. Definición

Como establece el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE), el IPC es un indicador para medir la variación porcentual promedio de los precios al por menor de un conjunto de bienes y servicios que los hogares adquieren para su consumo, con periodicidad mensual.

La variación del precio de un bien o servicio es la suma ponderada de variación del precio del artículo en las ciudades investigadas. Se consultan establecimientos de comercio al por menor de bienes o servicios de consumo final, para los hogares del país.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

El universo del estudio lo componen todos los establecimientos de comercio al por menor ubicados en el área urbana que distribuyen los bienes y servicios de consumo final demandados por los hogares del país. Se incluyen colegios, viviendas en arriendo y hospitales.

Su período de referencia es el mes en el que se recolecta la información y su período de observación es entre 20 y 22 días hábiles por mes. Para el año 2019, su periodo base es diciembre de 2018=100.

Tasas indizadas al IPC

Independientemente de la tendencia que tomen las tasas de interés nominales, el inversionista busca garantizar que su dinero preserve el poder adquisitivo con un incentivo adicional a la inflación. Los títulos indizados al IPC tienen un margen adicional o unos puntos de ajuste conocidos como spread.

Debido a que el IPC representa una tasa compuesta por las variaciones mensuales de precios de los productos de la canasta familiar de los últimos 12 meses, está representada en una tasa efectiva, y el margen adicional o los puntos de ajuste también se expresan de manera efectiva. El principio financiero que dice que dos tasas efectivas no se pueden sumar o restar directamente lleva a que la tasa total (IPC+*spread*) sea una tasa compuesta o combinada.

» Se calcula así:

$$Tasa_{combinada} = (((1+\Delta\%\ IPC)x(1+margen))-1)$$

donde:

$\Delta\%\ IPC$: variación porcentual del IPC (inflación anual)

3.1.2. Aplicaciones

Ejemplo 1

Se negocia un título para ser descontado al IPC+3% y la inflación de los últimos 12 meses fue de 3,75%.

$$((1+3{,}75\%)x(1+3\%)-1) = 6{,}8625\%$$

¿Cuál es la tasa total de descuento de cada flujo?

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Respuesta: 6,8625% E.A.

Ejemplo 2

El 18 de febrero de 2019, un inversionista compra en 101,000% del valor nominal de COP$ 200.000.000 un CDT emitido el 10 de enero de 2019 y con vencimiento el 4 de noviembre de 2019, con una tasa de referencia basada en el IPC del 3,01% anual más un margen del 2% efectivo anual.

¿Cuál es la tasa efectiva anual para el inversionista?

1. Como es un título con una tasa indizada al IPC más un margen efectivo anual, es necesario combinar las tasas de interés para conocer qué tasa total se paga al vencimiento:

$$Tasa\ de\ interés\ total = ((1+3{,}01\%)x(1+2\%)-1) = 5{,}07\%\ E.A.$$

Recuerde: deben combinarse las tasas de manera geométrica porque no pueden sumarse tasas efectivas.

2. Entre la fecha de emisión y la de vencimiento hay 298 días que deben remunerarse con la tasa de interés, por lo tanto el valor futuro es:

$$VF = V.P\left(1+i_{efectivo\ anual}\right)^{\frac{días}{365}}$$

$$VF = 100\left(1+5{,}07\%\right)^{\frac{298}{365}}$$

$$VF = 104{,}1206$$

3. El paso siguiente es graficar el flujo entre el 10 de enero de 2019 y el 4 de noviembre de 2019 (vencimiento del CDT):



Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

4. Ahora se procede a calcular la tasa efectiva anual para el inversionista:

Desde la fecha de compra hasta el vencimiento hay 259 días:

$$Tasa\ efectiva\ anual = \left[\frac{Precio\ venta}{Precio\ compra}\right]^{\frac{365}{DÍAS}} - 1$$

$$Tasa\ efectiva\ anual = \left[\frac{104{,}1206}{101{,}000}\right]^{\frac{365}{259}} - 1$$

$$Tasa\ efectiva\ anual = 4{,}3816\%$$

Respuesta: la tasa efectiva anual para el inversionista es 4,3816%

3.2. La Unidad de valor real (UVR)

3.2.1. Definición

El Banco de la República señala que la Unidad de valor real (UVR) refleja el poder adquisitivo de la moneda con base en la variación del IPC del mes inmediatamente anterior.

Se utiliza para calcular el costo de los créditos de vivienda para que las entidades financieras mantengan el poder adquisitivo del dinero prestado.

La Ley 546 de 1999 (Ley de Vivienda) definió la UVR y el Banco de la República es la entidad que la certifica.

La fórmula para el cálculo de la UVR, según la Resolución Externa No. 13 de 2000 emitida por el Banco de la República, es:

$$UVR_t = UVR_{15}\,(1+IPC)^{(t/d)}$$

donde:

UVR_t: valor en moneda legal colombiana de la UVR el día t del período de cálculo

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

UVR_{15}: valor en moneda legal colombiana de la UVR el día 15 de cada mes (último día del período de cálculo anterior)
IPC: variación mensual del IPC durante el mes calendario inmediatamente anterior al mes del inicio del periodo de cálculo
t: número de días calendario transcurridos desde el inicio de un período de cálculo hasta el día de cálculo de la UVR; tiene valores entre 1 y 31 de acuerdo con el número de días calendario del respectivo período de cálculo
d: número de días calendario del respectivo período de cálculo y tiene valores entre 28 y 31.

Tasas indizadas a la UVR

Los títulos valores denominados en UVR se contabilizan y valoran en pesos pero su precio se liquida en UVR, como cualquier otra moneda diferente del peso colombiano COP.



TES UVR

Los títulos de tesorería, clase B denominados en unidades de valor real constante, son títulos de deuda pública interna de la República de Colombia, emitidos por la Nación -Ministerio de Hacienda y Crédito Público- conforme a la ley 51 de 1990, destinados a financiar apropiaciones del presupuesto general de la Nación. Son títulos de renta fija a tasa fija denominados UVR tanto principal como cupones de intereses, serán colocados y pagados en moneda legal Colombiana utilizando el valor de la UVR vigente al día de su exigibilidad, donde la evolución del valor de la UVR, en moneda legal Colombiana, estará determinada por el IPC; son títulos a la orden y libremente negociables en el mercado de capitales colombiano por medio del procedimiento de subasta (Superfinanciera, 1999).



TÍTULOS HIPOTECARIOS (TIPS y TIS)

[...L]os títulos hipotecarios o TIPS son derivados de la cartera hipotecaria de las entidades bancarias, emisiones [que] también pueden ser respaldadas por operaciones de *leasing*. Así mismo, los títulos TIS corresponden a cartera hipotecaria, pero son originados por entidades no bancarias [...] (Asobancaria, 2018).

3.2.2. Aplicaciones

Ejemplo 3

La UVR para el día 15 de agosto de 2019 fue COP$ 268,6880 y la inflación del mes de julio fue 0,22% mensual.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

¿Cuál es el valor de la UVR para el 14 septiembre de 2019?

$$UVR_{14\ sep} = UVR_{15\ ago}\left(1+Inflación\right)^{\frac{30}{31}}$$
$$UVR_{14\ sep} = 268{,}6880\ \left(1+{+}0{,}0022\right)^{\frac{30}{31}}$$
$$UVR_{14\ sep} = 269{,}2600$$

Respuesta: la UVR para el 14 septiembre de 2019 es COP$ 269,2600

Alternativamente, como el valor de la UVR aumenta cada día por efecto de la inflación del mes anterior, puede llegarse al mismo valor de la UVR para el día 14 de septiembre, conociendo el valor de la UVR del día 13 de septiembre:

$$UVR_{13\ sep} = 269{,}2409$$
$$UVR_{14\ sep} = UVR_{13\ sep}\ x\ \left(1+0{,}022\right)^{\frac{1}{31}}$$
$$UVR_{14\ sep} = 269{,}2600$$

Ejemplo 4

Se tiene un bono en UVR, con un rendimiento efectivo en UVR del 4% y una inflación proyectada del 3,0% efectiva anual.

¿Cuál es el rendimiento efectivo en COP$?

Como las tasas efectivas no pueden sumarse directamente, se procede a calcular la tasa efectiva en pesos a través de la conformación de una tasa combinada o combinación de ellas:

$$Tasa\ efectiva\ en\ pesos = \left(\left(\left(1+tasa\ UVR\right)x\left(1+Inflación\right)\right)-1\right)$$

$$Tasa\ efectiva\ en\ pesos = \left(\left(\left(1+4{,}00\%\right)x\left(1+3{,}00\%\right)\right)-1\right)$$

$$Tasa\ efectiva\ en\ pesos = 7{,}12\%\ E.A.$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

3.3. El Indicador bancario de referencia (IBR)

3.3.1. Definición

El Indicador bancario de referencia (IBR) es una tasa de referencia de corto plazo creada por el Ministerio de Hacienda y Crédito Público, el Banco de la República y la Superintendencia Financiera de Colombia, denominada en pesos colombianos con plazos de 1 día, 1 mes, 3 meses y 6 meses para conocer las condiciones de liquidez a corto plazo. Empezó a regir en enero 2008 y refleja el precio al que los bancos están dispuestos a captar o a ofrecer recursos en el mercado monetario.

El IBR logra una transmisión más rápida y eficiente de las decisiones de política monetaria del Banco de la República en los mercados de crédito, refleja el verdadero costo del dinero en los plazos en los que se calcula y es un índice de referencia para profundizar los derivados de tasa de interés en Colombia.

El IBR para los plazos de un (1) mes y tres (3) meses está fundamentado en la cotización de *swaps* de tasa de interés *Overnight Index Swap* (OIS), en donde se intercambian los flujos de una tasa fija por una variable. La tasa fija para cada plazo es la mediana que resulte del proceso de cotización y es equivalente al IBR del plazo correspondiente, mientras que la tasa variable corresponde a la tasa de interés compuesta del IBR *overnight* durante el periodo de vigencia del *swap*. Con esta misma metodología, desde el 23 de mayo del (sic) 2016 se calcula el IBR a seis (6) meses (Banrep, s.f.b).

Tasas indizadas al IBR

Las tasas indizadas al IBR se publican como IBR + margen, con los mismos términos de capitalización con ambos en términos nominal anual.

Si la tasa fijada para un crédito es IBR a un (1) mes + 5% y asumiendo que el IBR vigente a un (1) mes es de 4%, y se quiere calcular la tasa total, entonces hay que sumar el IBR más el *spread*, de forma lineal. Así, el resultado es 9% nominal anual mes vencido (Asobancaria, 2017).

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales



El IBR se publica con los siguientes periodos de capitalización:

- nominal mes vencido
- nominal trimestre vencido
- nominal anual semestre vencido.

El *spread* o margen tiene los mismos términos de capitalización.



3.3.2. Aplicaciones

Ejemplo 5

Un cliente constituyó el día 1 un crédito por COP$ 10.000.000 con el Banco XYZ a una tasa IBR + 6,5% T.V.

¿Cuál es la tasa efectiva anual equivalente a la tasa pactada con el Banco XYZ, sabiendo que el IBR en el día 1 es 4,115% mes vencido?

1. Primero se convierte la tasa del IBR nominal mes vencido a trimestre vencido:

$$interés_{periódico} = \frac{4{,}115\%}{12} = 0{,}3429\%$$

Este interés equivale a una tasa efectiva anual de:

$$Tasa\ efectiva\ anual = \left[(1+0{,}3429)^{12}-1\right] = 4{,}1935\%\ E.A.$$

$$UVR_{14\ sep} = 269{,}2600$$

Esta tasa del 4,1935% E.A. equivale a una tasa nominal trimestre vencido de:

$$Tasa\ nominal\ T.V. = \left[\left((1+E.A.)^{\frac{1}{4}}-1\right)x\ 4\right] = 4{,}1291\%\ N.T.V.$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

2. Se procede a calcular la tasa total del crédito de manera nominal:

$$Tasa\ nominal\ total\ T.V. = IBR\ T.V. + spread\ T.V.$$

$$Tasa\ nominal\ total\ T.V. = 4{,}1291\%\ T.V. + 6{,}5\%\ T.V. = 10{,}6291\%\ T.V.$$

3. Finalmente, se calcula la tasa efectiva anual del crédito:

$$interés_{periódico} = \frac{10{,}6291\%}{4} = 2{,}6573\%$$

$$Tasa\ efectiva\ anual = \left[(1+0{,}026573)^{4}-1\right] = 11{,}0603\%\ E.A.$$

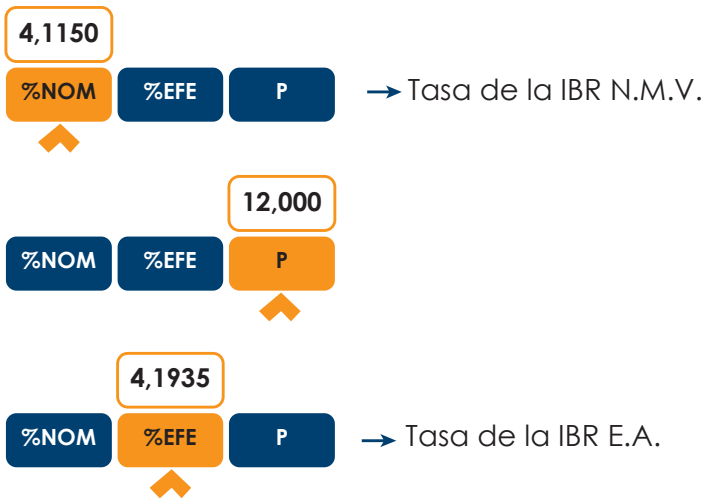
$$11{,}0603\%\ E.A.$$

Respuesta: la tasa efectiva anual equivalente a la tasa pactada con el Banco XYZ es 11,0603% E.A.

» En la calculadora financiera:

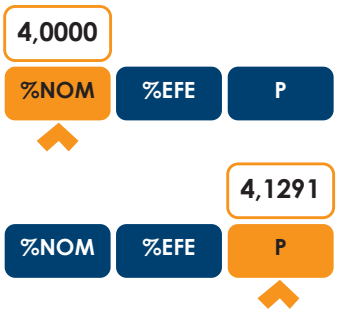
1. Convertir la tasa del IBR N.M.V. a E.A.

Seleccionamos *FIN*, *CNVI*, *PER*, e ingresamos la información como se describe a continuación:



Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

2. Convertir la IBR E.A. a nominal trimestre vencido:



La tasa de la IBR 4,1935% E.A. equivale a una tasa del 4,1291% nominal trimestre vencido.

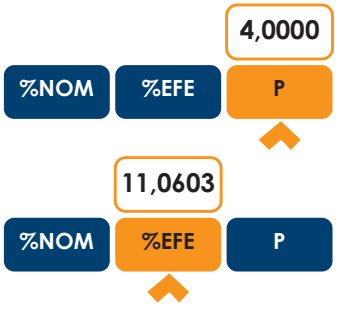
3. Calcular la tasa total del crédito de manera nominal:



El resultado corresponde al resultado de adicionar el spread al IBR en términos nominales:

$$\textit{Tasa nominal total T.V.} = \textit{4,1291\% NTV} + \textit{6,5\% N.T.V.} = \textit{10,6291\% N.T.V.}$$

4. Calcular la tasa efectiva anual del crédito:



La tasa efectiva anual equivalente al IBR + 6,5% T.V. que ofrece esta inversión es del 11,0603% E.A.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

3.4. La tasa depósito a término fijo (DTF)

3.4.1. Definición

La tasa Depósito a término fijo (DTF) es una referencia de lo que cuesta el dinero en Colombia, como la prime rate en Estados Unidos o la libor en el Reino Unido. Muchos créditos se pactan a la DTF más un margen o spread como una forma de prevenir el riesgo de variaciones en la tasa de interés durante la vigencia del crédito.

Su vigencia es semanal y se calcula como el promedio ponderado de las diferentes tasas de interés de captación utilizadas por los bancos, corporaciones de ahorro y vivienda, corporaciones financieras y compañías de financiamiento comercial para calcular los intereses que reconocen a los CDT con duración de 90 días.

Como establece el Banco de la República, para calcular la DTF como un promedio ponderado se deben seguir los siguientes pasos

23 **Recolectar, para cada una de las entidades financieras mencionadas anteriormente, el valor de la tasa de interés que reconocen por los CDT a 90 días y la cantidad de recursos (dinero) que la gente tiene depositados en CDT a 90 días**

3 **Multiplicar el valor de la tasa de interés por la cantidad de recursos, para cada entidad financiera y sumar los resultados obtenidos.**

3 **Dividir la suma obtenida entre el total de los recursos depositados en CDT a 90 días en todas las entidades financieras. Este valor corresponde a la DTF que se utiliza en la siguiente semana.**

Tasas indizadas a la DTF

La tasa DTF se expresa como **nominal trimestre anticipado**, por lo tanto el *spread* también está expresado de la misma forma, según el Banco de la República. Al tratarse de dos **tasas nominales** basta con sumarlas o restarlas para obtener la tasa nominal total:

$$\textit{Tasa nominal total T.A.} = \textit{DTF T.A.} + \textit{spread T.A.}$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

3.4.2. Aplicaciones

Ejemplo 6

Se tiene una inversión que ofrece un interés de DTF+2% y la DTF actual es 4,45% T.A.

¿Cuál es su tasa efectiva anual?

Va a trabajarse base 360.

1. Se calcula la tasa nominal total: DTF T.A. + spread T.A.
2. Se convierte la tasa nominal en una tasa de interés periódico anticipado
3. Se calcula el interés periódico vencido partiendo del interés periódico anticipado
4. Finalmente, se calcula la tasa efectiva anual.

1. Calcular la tasa nominal total:

$$Tasa\ nominal\ total = 4{,}45\%\ T.A. + 2\%\ T.A.$$

$$Tasa\ nominal\ total = 6{,}45\%\ T.A.$$

Pueden sumarse porque las dos tasas son nominales.

2. Convertir la tasa nominal en una tasa de interés periódico anticipado:

$$Interés_{periódico\ anticipado} = \frac{6{,}45\%}{4}$$

$$Interés_{periódico\ anticipado} = 1{,}6125\%\ T.A.$$

3. Calcular el interés periódico vencido partiendo del interés periódico anticipado:

$$Interés\ periódico\ vencido = \frac{0{,}016125}{1\text{-}0{,}016125}$$

$$Interés\ periódico\ vencido = 0{,}016389$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

4. Calcular la tasa efectiva anual:

$$Tasa\ efectiva\ anual = \left[(1+0{,}016389)^{\frac{360}{90}} - 1\right] x100$$

$$Tasa\ efectiva\ anual = 6{,}71864\%\ E.A.$$

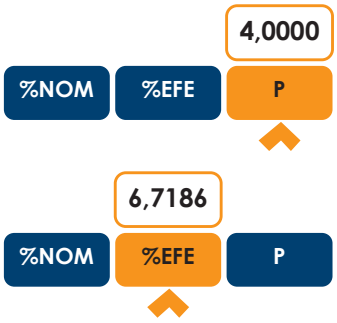
» En la calculadora financiera:

1. $Tasa\ nominal\ total = 6{,}45\ T.A. = (4{,}45\%\ T.A. + 2\%\ T.A.)$

Seleccionamos *FIN*, *CNVI*, *PER*, e ingresamos la información como se describe a continuación:

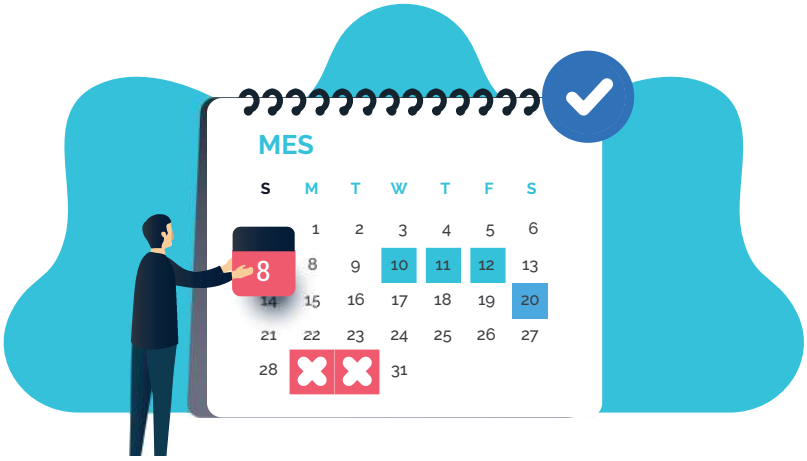


2. Convertir esta tasa N.T.A. a E.A.



Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

4. Anualidades



Objetivos de aprendizaje

- Establecer la diferencia entre una anualidad vencida y una anualidad diferida.
- Comprender las anualidades vencidas y diferidas con ejemplos prácticos.

4.1. Definición

Una anualidad es una serie uniforme de flujos con las siguientes características:



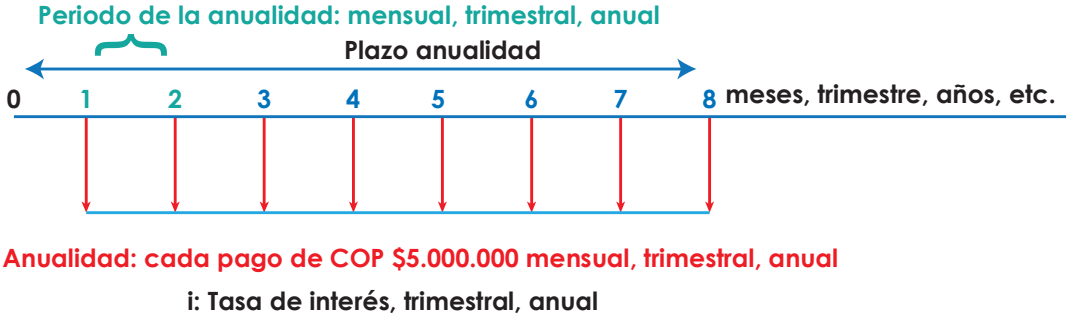
- Todos los flujos son de igual valor
- El número de pagos es igual al número de períodos
- Todos los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo; pueden ser semanales, mensuales, trimestrales o anuales
- A todos los pagos se les aplica la misma tasa de interés.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Arquitectura de una anualidad:

- **Periodo de la anualidad**, también llamado periodo de pagos: espacio de tiempo fijado entre el vencimiento de dos pagos sucesivos (mes, trimestre, semestre, año)
- **Tasa de interés de la anualidad:** tasa de interés que se aplica a los pagos o depósitos de la anualidad en modalidad periódica
- **Plazo de la anualidad:** intervalo de tiempo comprendido entre el primer y el último período
- **Anualidad:** pago o renta periódico y constante de cada depósito o pago.





4.2. Anualidad vencida

4.2.1. Definición

En las anualidades ordinarias vencidas el primer pago se efectúa un período después de la fecha de negociación conocida como punto o periodo cero (0).

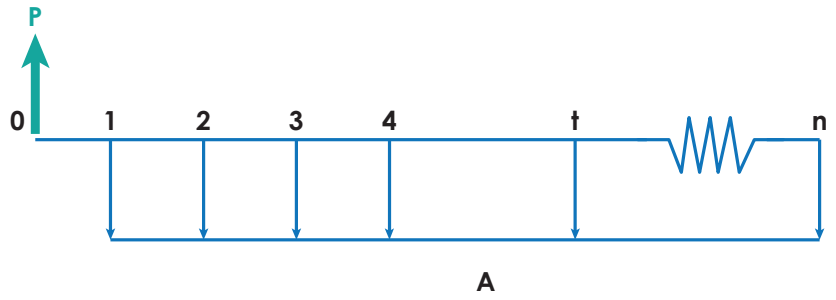
Una serie uniforme vencida se inicia con un período (periodo cero (0) o valor presente) y termina con un último pago que coincide con el punto donde se ubica el valor futuro equivalente a la serie uniforme vencida.

Puede calcularse el valor presente (P) o el valor futuro (F) de la anualidad vencida.

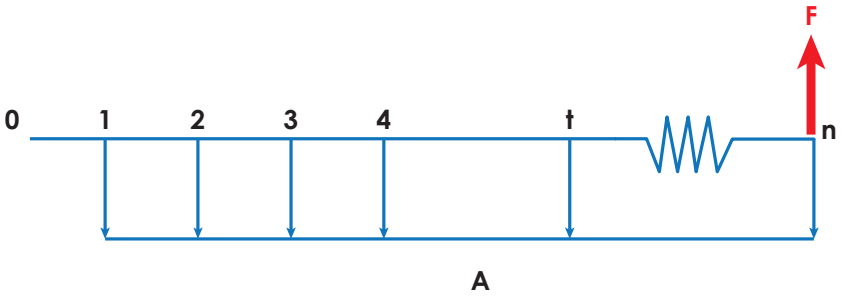
Gráficamente se representa una serie uniforme vencida de la siguiente manera:

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Anualidad **A** en **n** períodos para saber el valor presente **P**:



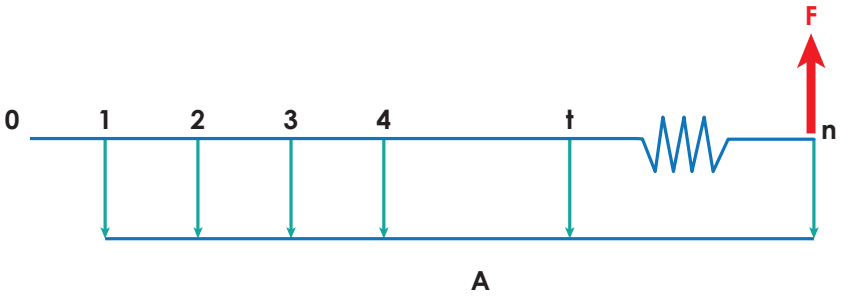
Anualidad **A** en **n** períodos para saber el valor futuro **F**:



4.2.2. Valor futuro de una anualidad vencida

Se tiene una anualidad vencida de **n** pagos de valor $ **A** cada uno, con una tasa de interés **i%** por periodo.

Para hallar una expresión matemática que brinde el valor futuro de esta serie uniforme, el gráfico del flujo de caja es:



Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Dicha expresión corresponde a una ecuación en diferencia finita cuya solución es para *t=n*:

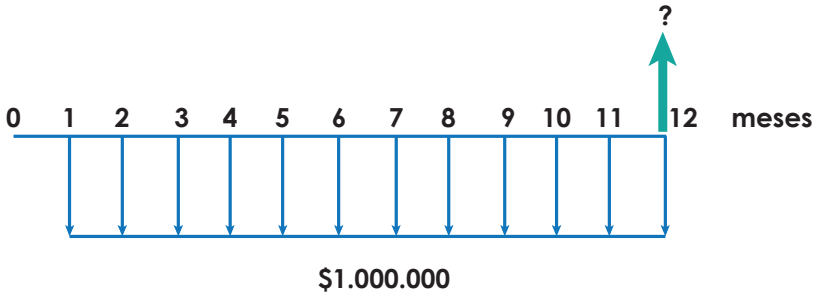
$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

4.2.3. Aplicaciones

Ejemplo 1

Cada último día de cada mes del año 2019 (enero a diciembre) se depositan COP$ 1.000.000 en un fondo de inversión que paga intereses a una tasa del 1% mensual.

¿Cuánto dinero se posee al finalizar el mes 12?



$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$VF = 1.000.000\left[\frac{(1{,}01)^{12} - 1}{0{,}01}\right]$$

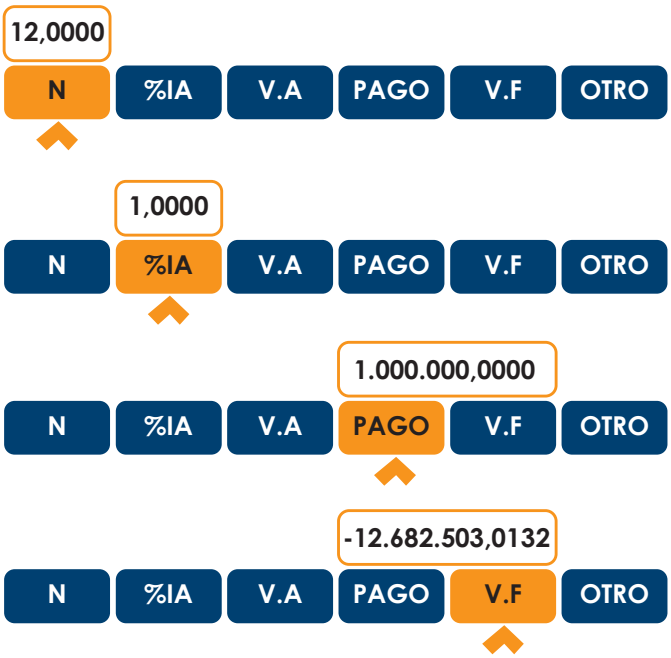
$$VF = \$12.682.503{,}01$$

Respuesta: el dinero que se posee al final del mes 12 es COP$ 12.682.503,01

» En la calculadora financiera:

Seleccionamos *FIN*, *VDT*, e ingresamos la información como se describe a continuación:

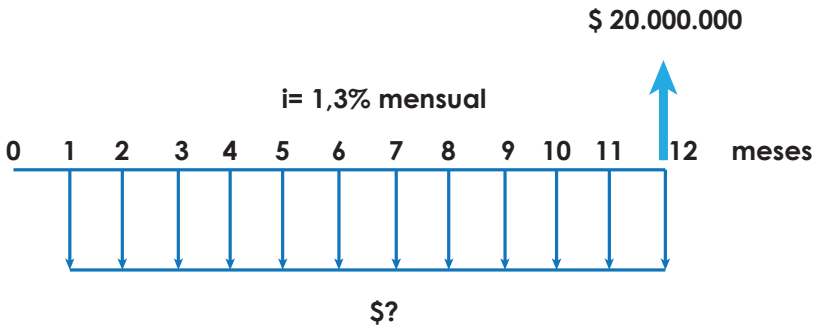
Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales



Ejemplo 2

El día 1 de enero de 2020 se planea ir a Roma en un (1) año y el viaje vale COP$ 20.000.000.

¿Cuánto debe depositarse en un fondo de inversión que paga intereses del 1,3% mensual?



$$A = VF\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 20.000.000\left[\frac{0.013}{(1{,}013)^{12} - 1}\right]$$

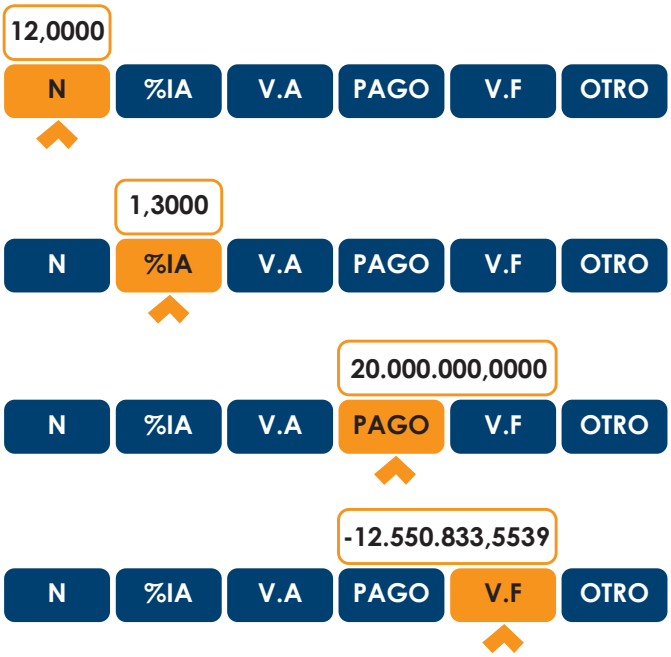
$$A = \$\ 1.550.833{,}55$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Respuesta: se requiere depositar COP$ 1.550.833.55

» En la calculadora financiera:

Seleccionamos *FIN*, *VDT*, e ingresamos la información como se describe a continuación:



4.2.4. Valor presente de una anualidad vencida

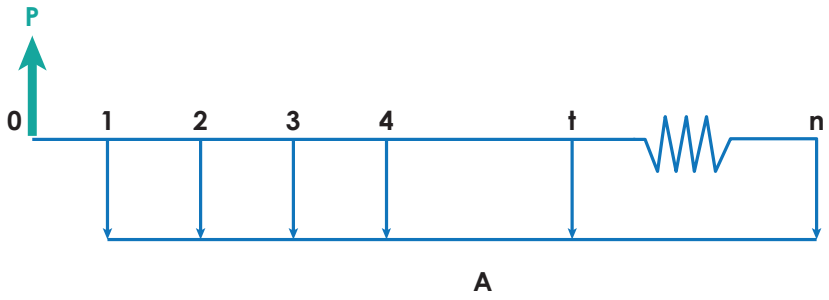
La anualidad vencida presenta las siguientes características:



- **Los pagos ocurren al final de cada período.**
- **El período de capitalización de la tasa coincide con la frecuencia de los pagos.**

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Su representación gráfica es:



donde:

n: número de pagos
A: anualidad
P: valor presente de la anualidad

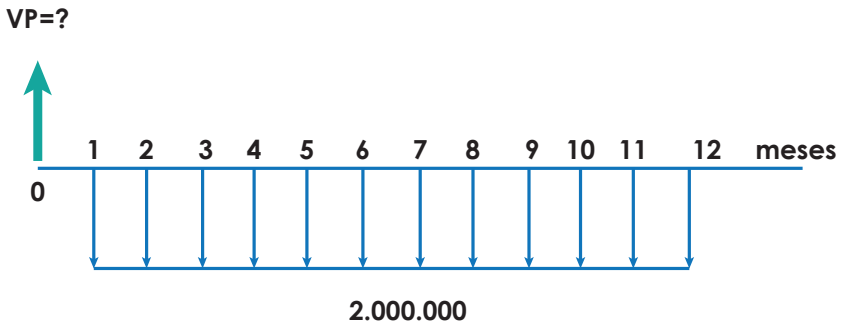
La expresión matemática para calcular el valor presente de la anualidad presentada en el gráfico es:

$$VP = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Ejemplo 3

El padre de Juan debe pagar el arriendo de su hijo mensualmente durante los próximos 12 meses por valor de COP$ 2.000.000 cada mes. Dentro de sus políticas de subsidio, la vivienda universitaria le cobra de manera vencida cada pago.

¿Cuál es el valor presente de todos los pagos a una tasa del 2% mensual?



Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

$$VP = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$VP = 2.000.000\left[\frac{1-(1+0,02)^{-12}}{0,02}\right]$$

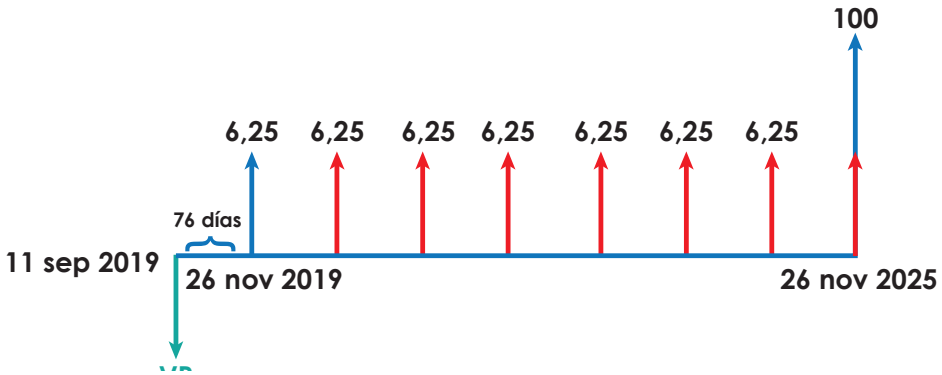
$$VP = \$\ 21.150.682,44$$

Respuesta: el valor presente es COP$ 21.150.682,44

Ejemplo 4

¿Cuál es el precio de un TES en el día 11 de septiembre de 2019 que vence el 25 de noviembre de 2025 con un cupón del 6,25% A.V. y una tasa del 5,48% E.A.?

Con los cupones de 6,25% y un nominal de 100, el flujo del título es:



1. Se trae a 26 de noviembre de 2019 la anualidad (color rojo):

$$6,25\%\left[\frac{1-(1+5,48\%)^{-6}}{0,0548}\right]$$

El valor de la anualidad al 26 de noviembre de 2019 es 31,2419%

2. Se trae a 26 de noviembre de 2019 el principal:

$$\frac{100\%}{(1,0548)^{6}} = 72,6061\%$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

3. Se calcula el valor presente a 11 de septiembre de 2019 de la anualidad, el principal y el cupón:

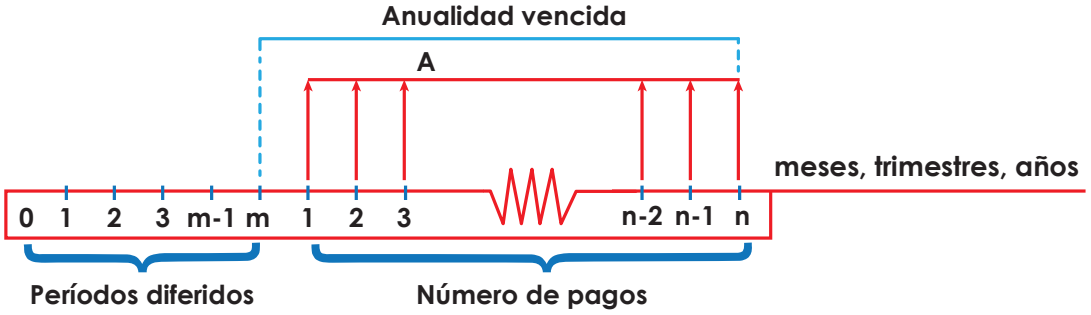
$$\underbrace{(31{,}2419\%}_{\text{Anualidad}}+\overbrace{72{,}6071\%}^{\text{Principal}}+\underbrace{6{,}25\%}_{\text{Cupon}})x\frac{1}{\underbrace{(1+5{,}48\%)^{(76/365)}}_{\text{Factor de descuento para 76 días}}}$$

Respuesta: el valor presente del TES el día 11 de septiembre de 2019 es 108,8827%

4.3. Anualidad diferida

4.3.1. Definición

Una anualidad diferida es un conjunto de pagos iguales realizados en intervalos de tiempo iguales y cuyo primer pago comienza después que transcurra cierto número de periodos diferidos.



$$VP = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-m}$$

donde:

m: número de períodos diferidos
n: número de pagos
i: tasa por período de capitalización
A: anualidad

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

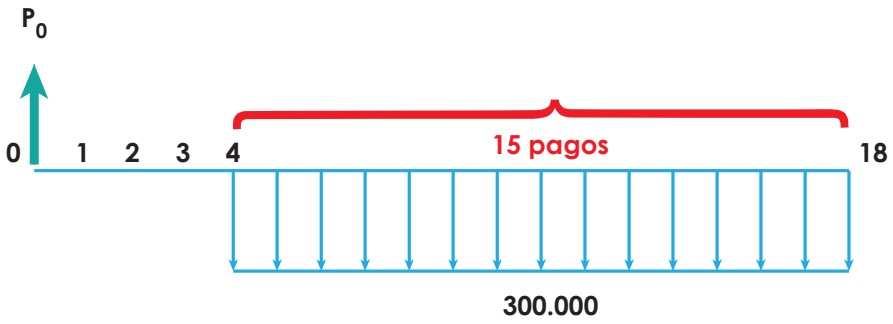
4.3.2. Aplicaciones

Ejemplo 5

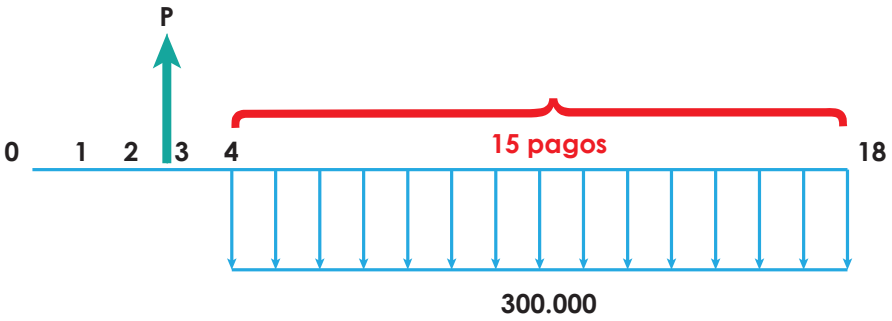
Se adquiere un producto financiado a 15 cuotas mensuales iguales de COP$ 300.000 cada una. La primera cuota debe cancelarse a los cuatro (4) meses y se pactó con la entidad financiera una tasa del 2% mensual.

¿Cuál es el valor del producto?

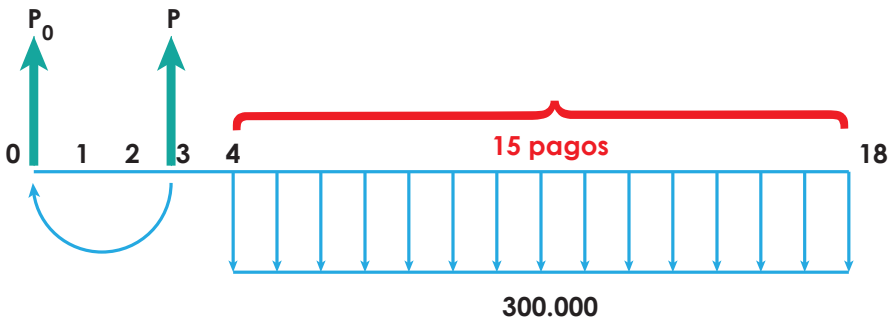
En la gráfica, la incógnita está en el momento cero donde va a calcularse el valor presente de la anualidad P0:



1. Se trae la anualidad al momento 3 y se halla el valor P:



2. Se trae el valor P del momento 3 al momento cero (0) que es el valor presente de la anualidad P0:



Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Los dos gráficos se resumen en la siguiente expresión matemática:

Este factor de descuento nos coloca en el momento cero

$$VP = 300.000\left[\frac{1-(1+0,02)^{-15}}{0,02}\right](1+0,02)^{-3}$$

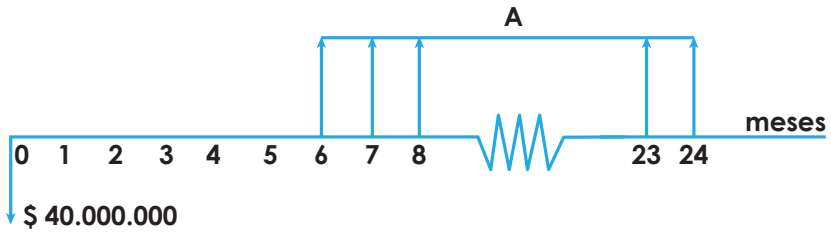
Esta expresión soluciona la anualidad al momento 3

Respuesta:

$$VP = 3.632.444,39$$

Ejemplo 6

Un padre de familia desea constituir un crédito para pagar las matrículas de sus dos hijos. El banco le presta COP$ 40.000.000 a una tasa de interés del 5% nominal mes vencido con un período de gracia de 5 meses y el plazo del crédito a 2 años.



¿Cuál es el valor de las cuotas mensuales que debe pagar el padre de familia?

1. Se calcula el valor del crédito a los 5 meses para saber cuánto se generó de intereses por el período de gracia:

$$\text{Valor del crédito a los 5 meses} = 40.000.000x(1+0,05)^{5} = \$\ 51.051.262,50$$

2. Se calcula la anualidad:

$$51.051.262,50 = A\,x\left[\frac{1-(1+0,10)^{-19}}{0,10}\right]$$

Respuesta:

$$A = \$\ 4.224.237,25$$

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Referencias y bibliografía

Agudelo, D. & Fernández, A. (2019). Matemáticas financieras: conceptos y aplicaciones. Bogotá: Pearson Educación de Colombia S.A.S.

Asobancaria -Asociación Bancaria y de Entidades Financieras de Colombia (2017). Estándares para la emisión de productos atados al Indicador Bancario de Referencia (IBR). Disponible en: http://www.asobancaria.com/wp-content/uploads/2018/03/Documento-de-est%C3%A1ndares-para-la-emisi%C3%B3n-de-productos-atados-al-IBR.pdf

Asobancaria -Asociación Bancaria y de Entidades Financieras de Colombia (2018). "Las titularizaciones: un vehículo para el crecimiento". Semana económica 2018. Edición 1157 del 8 de octubre de 2018. Disponible en: https://www.asobancaria.com/wp-content/uploads/1157.pdf

Banrep -Banco de la República (s.f.a). Unidad de valor real (UVR). Disponible en: https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/unidad-valor-real-uvr

Banrep -Banco de la República (s.f.b). Indicador bancario de Referencia (IBR). Disponible en: http://www.banrep.gov.co/en/node/41435

Banrep -Banco de la República (s.f.c). Depósitos a término fijo. Disponible en: https://enciclopedia.banrepcultural.org/index.php?title=Dep%C3%B3sitos_a_t%C3%A9rmino_fijo

Banrep -Banco de la Republica (s.f.d). "Tasas de captación (DTF y CDT)". Glosario. Disponible en: https://www.banrep.gov.co/es/glosario/tasas-captacion

Banrep -Banco de la Republica (2000). Resolución Externa No. 13 de 2000. Disponible en: http://banrep.gov.co/sites/default/files/reglamentacion/archivos/bjd_23_2000_res_13.pdf

Berk, J. & Demarzo, P. (2008). Finanzas corporativas. México: Pearson Educación.

Calderón-Acevedo, S. (2006). Operaciones de Tesorería. Bogotá: Editorial CESA.

CFA -CFA Institute (2018). CFA Program Curriculum 2019. "The Time Value of Money. Reading 6". John Wiley & Sons.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y uso para fines comerciales

Corredores Asociados S.A. (2005). Manual para el cálculo de rentabilidades. Bogotá D.C.: Servi-Flash.

DANE -Departamento Administrativo Nacional de Estadística (2019). Boletín Técnico Índice de Precios al Consumidor (IPC) enero de 2019. 5 de febrero de 2019. Disponible en: https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/ipc/bol_ipc_ene19.pdf

Fisher, I. (1930). Theory of interest: as determined by impatience to spend income and opportunity to invest it. Clifton: Augustusm Kelly Publishers.

Rosillo, J. (2009). Matemáticas financieras para decisiones de inversión y financiación. Bogotá: Cengage Learning.

Sapag, N., Sapag, R., Sapag, J. (2014). Preparación y evaluación de proyectos. México D.F: McGraw-Hill.

Sarmiento, J. A., Cayón, E., Rivera, J. C. (2007). Matemáticas financieras en Microsoft Excel: la hoja de cálculo como herramienta de solución de problemas. Bogotá: Editorial Pontificia Universidad Javeriana.

Superfinanciera -Superintendencia Financiera de Colombia (1999). Normas destacadas, Boletín 6 de julio 1999. Disponible en: https://www.superfinanciera.gov.co/jsp/Publicaciones/publicaciones/loadContenidoPublicacion/id/39013/dPrint/1/c/00

Superfinanciera -Superintendencia Financiera de Colombia (s.f.b). Conceptos sobre Tasa de interés. Disponible en: https://www.superfinanciera.gov.co/inicio/60956



amv

Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia

Calle 72 No. 10-07 oficina 1202 / Bogotá - Colombia
PBX: (571) 607 1010 - Fax: (571) 347 0759
www. amvcolombia.org.co

